



TITLE:

# On rank-one isometries of right-angled Coxeter groups and their boundaries (Research on general and geometric topology and related topics)

AUTHOR(S):

保坂, 哲也

---

CITATION:

保坂, 哲也. On rank-one isometries of right-angled Coxeter groups and their boundaries (Research on general and geometric topology and related topics). 数理解析研究所講究録 2010, 1681: 33-37

ISSUE DATE:

2010-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141370>

RIGHT:

## On rank-one isometries of right-angled Coxeter groups and their boundaries

宇都宮大学教育学部

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

本稿では, Coxeter 群  $W$  の rank-one isometry と Coxeter 群  $W$  が幾何学的に (コンパクト, 離散的, 等長的に) 作用する CAT(0) 空間  $X$  の理想境界  $\partial X$  のフラクタルのような構造について述べる.

CAT(0) 空間およびその境界については [6], [9], [16] を, Coxeter 群および Coxeter 系については [5], [7], [24] を, また, Coxeter 系から定義される Davis 複体とよばれる CAT(0) 空間については [10], [12], [28] を参照されたい.

CAT(0) 空間  $X$  の isometry  $g : X \rightarrow X$  が, rank-one であるとは, まず  $g$  は hyperbolic isometry (cf. [6, p.229]) であり, axis とよばれる geodesic line  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow X$  が存在する. ここで  $g$  の axis とは, 任意の  $t \in \mathbb{R}$  について  $g(\sigma(t)) = \sigma(t + t_0)$  と  $g$  である定数  $t_0$  だけ平行移動する軸のことである. このとき, ある axis  $\sigma$  のイメージ  $\text{Im } \sigma$  をふちにもつような平坦な半平面  $\mathbb{R}_+^2 (= \mathbb{R} \times [0, \infty))$  が等長的に  $X$  に埋め込まれないとき,  $g$  を  $X$  の rank-one isometry という.

Rank-one isometry について, W.Ballmann-M.Brin によって以下の定理が示されている.

**Theorem** (W.Ballmann-M.Brin [1, Theorem A]). 群  $G$  が CAT(0) 空間  $X$  上に幾何学的に作用しているとする. このとき  $G$  に  $X$  の rank-one isometry  $g_0 \in G$  が (ひとつでも) 存在すれば,  $X$  の理想境界  $\partial X$  の 2 つの任意の空でない開集合  $U, V$  について,  $g \in G$  で

$$g(\partial X - U) \subset V \quad g(\partial X - V) \subset U$$

となるものが存在する. ここで特に  $g$  は rank-one でとれる.

ここで,  $g \in G$  は  $X$  の isometry であり, その自然な拡張として境界上の同相写像  $g : \partial X \rightarrow \partial X$  を導く.

この定理の中で,  $\partial X - V$  を任意の閉集合  $F$  ととらえると, 「 $X$  の理想境界  $\partial X$  の任意の空でない開集合  $U$  と任意の  $X$  でない閉集合  $F$  について,  $g \in G$  で  $g(F) \subset U$  となるものが存在する」ととらえなおすことができる.

これは, 理想境界  $\partial X$  の複雑さ, 位相的なフラクタルのような状態を表している.

$X$  が双曲空間  $\mathbb{H}^n$  のとき, その境界  $\partial X = \partial \mathbb{H}^n$  は  $(n-1)$ -球面  $S^{n-1}$  となる. これは, 位相的フラクタルな状態をもつ最も簡単な例である. しかし, このように境界が球面となる場合以外は, 一般に, 境界は非常に複雑となる. 実際, 境界  $\partial X$  が homotopy が消えていない真部分閉集合  $A$  を含めば, 境界  $\partial X$  上の任意の空でない開集合に  $A$  と同相なものが含まれ,  $A$  と同相なものが境界上に稠密に存在する. また,  $\partial X$  上の十分に小さい近傍  $V$  に対して, その補集合  $\partial X - V$  は,  $\partial X$  上の任意の空でない (いくらでも小さい) 開集合に同相なものが含まれる構造をもつ.

一般に, 群が幾何学的に作用している CAT(0) 空間の境界や, Coxeter 群の境界が, このような位相的なフラクタルの構造をもつ可能性があることは, その境界の cohomology や cohomology 次元の情報からみてとることができた ([3], [4], [11], [14], [19]). また, そのような境界の典型例が, H. Fischer ([15]) の結果にみられる.

これまでに, このような境界の複雑さをとらえるため, 力学系の概念である「極小性」と「攪拌集合」の考え方を導入してきた.

境界  $\partial X$  (への群  $G$  の作用) が極小であるとは, 任意の軌道  $G\alpha$  が  $\partial X$  で稠密であることをいう.

また, 境界  $\partial X$  (への群  $G$  の作用) が攪拌的であるとは, 任意の 2 点  $\alpha, \beta \in \partial X$  ( $\alpha \neq \beta$ ) に対して,

$$\begin{aligned} \limsup \{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} &> 0 \text{ and} \\ \liminf \{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} &= 0 \end{aligned}$$

をみたすことをいう.

Coxeter 群の境界の極小性と攪拌集合に関するいくつかの結果が [20], [21] にみられる.

いまここで, 特に right-angled Coxeter 群の場合を考える.

既約な right-angled Coxeter 系  $(W, S)$  について, 既約性から, 生成元の有限列  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset S$  で,  $o(a_i a_{i+1}) = \infty$  ( $i = 1, \dots, n$  ただし  $a_{n+1} = a_1$ ), かつ,  $\{a_1, \dots, a_n\} = S$  をみたすものがとれる (ここで  $s_i = s_j$  ( $i \neq j$ ) となってもよい).

このとき, Coxeter 群  $W$  の元  $w_0 = a_1 a_2 \dots a_n$  を考えると, これは right-angled Coxeter 系  $(W, S)$  の Davis 複体  $\Sigma$  の rank-one isometry となる.

W.Ballmann-M.Brin の定理と Splitting Theorem ([22], [27]) および [20], [21] の結果から, 以下の定理を得る.

**Theorem.** *Right-angled Coxeter 系  $(W, S)$  とその Davis 複体  $\Sigma$  および, Coxeter 群  $W$  が幾何学的に作用する任意の  $CAT(0)$  空間  $X$  に対して, 以下はすべて同値となる. ただし,  $|\partial\Sigma| > 2$  とする.*

- (1)  $(W_{\tilde{S}}, \tilde{S})$  は既約で *non-affine*.
- (2)  $W$  は  $\Sigma$  の rank-one isometry を含む.
- (3)  $W$  は  $X$  の rank-one isometry を含む.
- (4)  $\partial\Sigma$  は位相的なフラクタル構造をもつ.
- (5)  $\partial\Sigma$  は極小.
- (6)  $\partial\Sigma$  は攪拌的.
- (7)  $\partial X$  は位相的なフラクタル構造をもつ.
- (8)  $\partial X$  は極小.
- (9)  $\partial X$  は攪拌的.
- (10)  $\Sigma$  は積  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  に分解する *quasi-dense* 部分集合を含まない. ただし  $\Sigma_i$  は非有界とする.
- (11)  $X$  は積  $X_1 \times X_2$  に分解する *quasi-dense* 部分集合を含まない. ただし  $X_i$  は非有界とする.
- (12)  $W$  は積  $W_1 \times W_2$  に分解する有限指数の部分群を含まない. ただし  $W_i$  は無限群とする.

ここで  $W_{\tilde{S}}$  は, 有限指数の parabolic 部分群で最小のものであり,  $W$  を既約分解したときの無限のパートでもある (cf. [13], [20], [21]).

この主定理は right-angled Coxeter 群について述べたものであるが, 一般の Coxeter 群の rank-one isometry に関する最近の P.Caprace-K.Fujiwara の結果 [8, Proposition 4.5] を用いると, 本定理は一般の Coxeter 群の場合に拡張できる ([23]).

Rank-one isometry を含む  $CAT(0)$  群が幾何学的に作用する  $CAT(0)$  空間  $X$  の境界  $\partial X$  は位相的なフラクタル構造をもつが, これはさらに, locally connected (cf. [25], [26]) や locally cut-point (cf. [29], [30]) などの境界の局所的な性質と関連をもつ.

## REFERENCES

- [1] W. Ballmann and M. Brin, *Orbihedra of nonpositive curvature*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 82 (1995), 169–209.
- [2] W. Ballmann, M. Gromov and V. Schroeder, *Manifolds of Nonpositive Curvature*, Progr. Math. vol. 61, Birkhäuser, Boston MA, 1985.
- [3] M. Bestvina, *The virtual cohomological dimension of Coxeter groups*, Geometric Group Theory Vol. 1, LMS Lecture Notes, vol. 181, 1993, pp. 19–23.
- [4] M. Bestvina, *Local homology properties of boundaries of groups*, Michigan Math. J. 43 (1996), 123–139.
- [5] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chapters IV–VI, Masson, Paris, 1981.
- [6] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [7] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1980.
- [8] P. Caprace and K. Fujiwara, Rank-one isometries of buildings and quasi-morphisms of Kac-Moody groups, arXiv:0809.0470v3, preprint.
- [9] C. B. Croke and B. Kleiner, *Spaces with nonpositive curvature and their ideal boundaries*, Topology 39 (2000), 549–556.
- [10] M. W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. 117 (1983), 293–324.
- [11] M. W. Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, Duke Math. J. 91 (no.2) (1998), 297–314.
- [12] M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of geometric topology (Edited by R. J. Daverman and R. B. Sher), pp. 373–422, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [13] V. Deodhar, *On the root system of a Coxeter group*, Commun. Algebra 10 (1982), 611–630.
- [14] A. N. Dranishnikov, *On the virtual cohomological dimensions of Coxeter groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (no.7) (1997), 1885–1891.
- [15] H. Fischer, *Boundaries of right-angled Coxeter groups with manifold nerves* Topology 42 (2003), 423–446.
- [16] E. Ghys and P. de la Harpe (ed), *Sur les Groupes Hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, Progr. Math. vol. 83, Birkhäuser, Boston MA, 1990.
- [17] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in Essays in group theory (Edited by S. M. Gersten), pp. 75–263, M.S.R.I. Publ. 8, 1987.
- [18] U. Hamenstädt, *Rank-one isometries of proper  $CAT(0)$ -spaces*, arXiv:0810.3794v1, preprint.
- [19] T. Hosaka, *On the cohomology of Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra 162 (2001), 291–301.
- [20] T. Hosaka, *Minimality of the boundary of a right-angled Coxeter system*, Proc. Amer. Math. Soc., 137 (2009), 899–910.
- [21] T. Hosaka,  *$CAT(0)$  groups and Coxeter groups whose boundaries are scrambled sets*, J. Pure Appl. Algebra, to appear.
- [22] T. Hosaka, *On splitting theorems for  $CAT(0)$  spaces and compact geodesic spaces of non-positive curvature*, arXiv:math.GR/0405551, preprint.
- [23] T. Hosaka, *On boundaries of Coxeter groups and topological fractal structures*, preprint.
- [24] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [25] M. Mihalik and K. Ruane,  *$CAT(0)$  groups with non-locally connected boundary*, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), 757–770.

- [26] M. Mihalik, K. Ruane and S. Tschantz, *Local connectivity of right-angled Coxeter group boundaries*, J. Group Theory 10 (2007), 531–560.
- [27] N. Monod, *Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting*, J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), 781–814.
- [28] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, Ohio State University, 1988.
- [29] P. Papasoglu and E. L. Swenson, *Boundaries and JSJ decompositions of  $CAT(0)$ -groups*, Geom. Funct. Anal. 19 (2009), 558–590.
- [30] E. L. Swenson, *A cut point theorem for  $CAT(0)$  groups*, J. Differential Geom. 53 (1999), 327–358.
- [31] J. Tits, *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*, Symposia Mathematica, vol. 1, pp. 175–185, Academic Press, London, 1969.